ПРИКЛАДНА ГЕОМЕТРІЯ ТА КОМП'ЮТЕРНІ ТЕХНОЛОГІЇ

УДК 519.632.4

Ю.М. БАРДАЧОВ, Г.Я. ТУЛУЧЕНКО

Херсонський національний технічний університет

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ВЕБЕРА ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ СПЛАЙНОВОЇ АПРОКСИМАЦІЇ

Дана стаття присвячена порівняльному аналізу впливів різних форм подання інтерполяційних сплайнів на характеристики розв'язку задачі Вебера у полярній системі координат методом Бубнова-Гальоркіна.

Шуканий розв'язок має форму добутку двовимірного сплайна та допоміжного множника. Допоміжний множник є неявним рівнянням границі області. У такий спосіб забезпечується виконання вимог до базисних функцій у методі Бубнова-Гальоркіна, а саме, задоволення ними нульових граничних умов у досліджуваній задачі. Двовимірний сплайн, в свою чергу, складається із тензорних добутків двох одновимірних сплайнів (кожний із яких є В-сплайном за своєю полярною координатою). Для опису базисних функцій цих В-сплайнів використані дві досліджувані форми опису. Розв'язання вказаної задачі виконується засобами системи комп'ютерної математики Maple.

У результаті виконаних досліджень практично показано, що в системах символьної математики певні переваги має застосування опису сплайнів єдиним виразом.

Ключові слова: задача Вебера, сплайн-апроксимація, метод Гальоркіна.

Ю.Н. БАРДАЧЕВ, Г.Я. ТУЛУЧЕНКО

Херсонский национальный технический университет

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ВЕБЕРА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СПЛАЙНОВОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Данная статья посвящена сравнительному анализу влияния различных форм представления интерполяционных сплайнов на характеристики решения задачи Вебера в полярной системе координат методом Бубнова-Галеркина.

Искомое решение имеет форму произведения двумерного сплайна и вспомогательного множителя. Вспомогательный множитель является неявным уравнением границы области. Таким образом обеспечивается выполнение требований к базисным функциям в методе Бубнова-Галеркина, а именно, удовлетворение ими нулевых граничных условий в исследуемой задаче. Двумерный сплайн, в свою очередь, состоит из суммы тензорных произведений одномерных сплайнов (каждый из которых является В-сплайном по своей полярной координате). Для описания базисных функций этих В-сплайнов использованы две исследуемые формы описания. Решение указанной задачи выполняется средствами системы компьютерной математики Maple.

В результате выполненных исследований практически показано, что в системах символьной математики определенные преимущества имеет применение описания сплайнов единым выражением.

Ключевые слова: задача Вебера, сплайновая аппроксимация, метод Галеркина.

Yu.M. BARDACHOV, H.Ya. TULUCHENKO
Kherson National Technical University

NUMERICAL SOLUTION OF THE WEBER PROBLEM WITH THE USE OF SPLINE APPROXIMATION

In computer math systems for the description of different types of interpolation splines the fragmentary method is used. In the tasks of mathematical physics, when searching the solution in the spline form, the traditional way for the presenting of latter leads to a significant slowdown in the implementation of the corresponding numerical methods. From the spline theory, it is known that an interpolation spline can be described by one formula – a linear combination of basic functions. This article is devoted to the comparative analysis of the impacts of these forms of the interpolation splines representation on the characteristics of the solution of the Weber problem in a polar coordinate system by the Bubnov-Galyorkin method. Weber's historic problem about the torsion of a cylindrical shaft with a circular twist currently is still used as a test problem for the approbation of new numerical methods for solving second-order elliptic problems owing to the existence of an exact solution.

The proposed solution is presented as a product of a two-dimensional spline and an auxiliary factor. The auxiliary factor is the implicit equation of the domain boundary. In this way the fulfillment of the requirements for the basic functions in the Bubnov-Galyorkin method, namely, the satisfaction of the boundary conditions in the investigated problem, is ensured. One-dimensional splines (each on its polar coordinate) are B-splines. To describe the basic functions of these B-splines, two exploratory forms of representation are used. The solution of this task is carried out by means of the system of computer mathematics Maple. The timing of the implementation of the algorithm for solving the Weber problem by the Bubnov-Galyorkin method on a polar grid is carried out. The practical convergence of the Bubnov-Galyorkin method was also evaluated for the approximate performance of the necessary operations of integration and its comparison with the theoretical rate of convergence of the method is completed.

As a result of the performed research it is practically shown that in the systems of symbolic mathematics the use of the description splines as the only expression has certain advantages.

Keywords: Weber problem, spline approximation, Galyorkin method.

Постановка проблеми

У системах комп'ютерної математики для опису інтерполяційних сплайнів різних видів традиційно використовують фрагментарний спосіб. У задачах математичної фізики (та їх узагальненнях) при пошуку розв'язку у вигляді сплайна традиційний спосіб подання останнього приводить до суттєвого уповільнення виконання відповідних чисельних методів. Із теорії сплайнів відомо, що інтерполяційний сплайн може бути описаний однією формулою – лінійною комбінацією базисних функцій. Результати порівняльного аналізу впливів вказаних форм подання інтерполяційних сплайнів на характеристики чисельних методів розв'язання крайових і граничних задач, що реалізуються в системах комп'ютерної математики, представлені окремими публікаціями і потребують як кількісного накопичення, так і систематизації та узагальнення.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Історична задача Вебера про кручення циліндричного стержня із круговою виточкою [1, С. 309] і в теперішній час використовується в якості тестової задачі для апробації нових чисельних методів розв'язання еліптичних задач другого порядку завдяки наявності точного розв'язку [2].

Задача Вебера. При крученні стержня з перерізом Ω знайти функцію напружень $U(x;y)$, яка задовольняє рівнянню:

$$\Delta U = -2 \tag{1}$$

із граничними умовами:

$$\left. U(x;y) \right|_G = 0, \tag{2}$$

де G – границя області Ω, яка в полярних координатах $(r;\varphi)$ описується рівнянням (рис. 1):

$$\left(r^2 - b^2\right)\left(1 - \frac{2a\cos\varphi}{r}\right) = 0. \tag{3}$$

Як відомо [1–2], задача Вебера дозволяє знайти точний розв'язок, який у декартових координатах має вигляд:

$$U(x;y) = a \cdot \left(x - b^2 \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} \right) + \frac{b^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(x^2 + y^2\right). \tag{4}$$

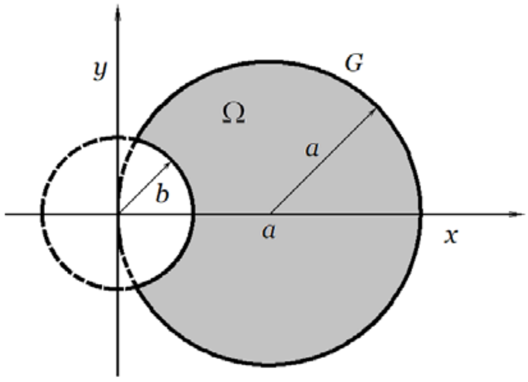


Рис. 1. Переріз циліндричного стержня із круговою виточкою.

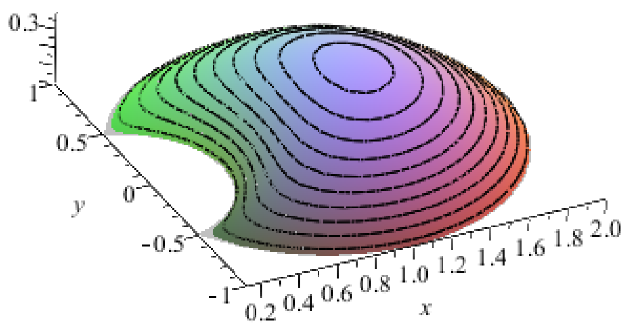


Рис. 2. Графік функції напружень *U*(*x*;*y*) (4), коли *a*=1; *b*=0,5.

У роботі [2] отримано наближений розв'язок цієї задачі за допомогою методу найменших квадратів, коли в якості звуження на Ω скінченновимірного підпростору базисних функцій Соболевського простору $S^h_{m,r}(\Omega)$ розглядається підпростір двовимірних кубічних апроксимуючих сплайнів, які є результатом тензорного добутку одновимірних сплайнів. При цьому апроксимація виконувалася на прямокутних сітках, які неузгодженні із досліджуваною областю. Досягнута практична швидкість збіжності методу співпадає із теоретичною $O(h^4)$.

У роботі [3] розглядається наближений метод розв'язання рівняння Софі Жермен-Лагранжа вимушених коливань жорстко закріпленої кругової пластинки, а в роботах [4–5] за тим же методом розв'язується задача Діріхле для рівняння Пуассона. Вказаний метод є методом Бубнова-Гальоркіна з представленням шуканого розв'язку за допомогою двовимірних напівлокальних згладжуючих сплайнів на рівномірній сітці у полярній системі координат. Двовимірний сплайн, що використовується у роботах [3–5] є сумою добутків одновимірних неперіодичних напівлокальних сплайнів за радіальною змінною та одновимірних періодичних напівлокальних сплайнів за змінним полярним кутом. Але надалі автори переходять до використання традиційних B-сплайнів, спираючись на відому теорему Каррі і Шонберга [6, С. 90–91] про можливість представлення будь-якого інтерполяційного сплайна через лінійну комбінацію B-сплайнів.

У роботах [7–8] обговорюються недоліки фрагментарного опису ланок сплайнів, коли вони застосовуються в системах символьної комп'ютерної математики, зокрема в Maple. З метою усунення цих недоліків у роботі [7] її автором пропонуються власні програмні процедури роботи із сплайнами [7, С. 260–276]. У роботі [8] з тією ж метою пропонується використовувати форму опису сплайна за допомогою однієї формули.

Мета дослідження

Метою дослідження є вивчення практичної доцільності використання в системах символьної математики опису інтерполяційних сплайнів єдиним виразом порівняно із традиційним фрагментарним описом. Для цього проводиться хронометрування реалізації алгоритму розв'язання задачі Вебера методом Бубнова-Гальоркіна на полярній сітці. В якості базисних функцій пропонується використовувати тензорні добутки B-сплайнів по кожній полярній координаті. Необхідно виконати порівняння швидкості знаходження розв'язку задачі та його точності при застосуванні двох способів опису одновимірних сплайнів: традиційного фрагментарного та єдиним виразом. Також підлягає оцінюванню практична збіжність методу Бубнова-Гальоркіна при наближеному виконанні необхідних операцій інтегрування та її зіставлення із теоретичною швидкістю збіжності метода.

Викладення основного матеріалу дослідження

Рівняння Пуассона (1) у полярній системі координат набуває вигляду:

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}=-2\,. \tag{5}$$

Для зручності проведення розрахунків помножимо рівняння (5) на ***r***:

$$r\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}=-2r\,. \tag{6}$$

Для реалізації методу Бубнова-Гальоркіна в якості скінченновимірного простору базисних функцій використаємо простір двовимірних кубічних B-сплайнів. У відповідності до цього розв'язок рівняння (6) із граничними умовами:

$$U(r;\varphi)\Big|_{\Gamma}=0\,, \tag{7}$$

де Γ – границя області $\overline{\Omega}$, на яку відображається область Ω при переході до полярної системи координат, –

будемо шукати у вигляді ряду з додатковим множником, який дорівнює лівій частині рівняння (3):

$$S(r;\varphi)\approx g(r;\varphi)\cdot\sum_{i=1}^{Q_\varphi}\sum_{j=1}^{Q_r}u_{ij}C_i(\varphi)D_j(r), \tag{8}$$

де u_{ij} – невідомі коефіцієнти, що підлягають визначенню; $C_i(\varphi)$ і $D_j(r)$ – одновимірні фундаментальні В-сплайни за відповідною змінною п'ятого степеня; $g(r;\varphi)=\left(r^2-b^2\right)\left(1-\dfrac{2a\cos\varphi}{r}\right)$.

Наявність множника $g(r;\varphi)$ в виразі шуканого розв'язку (8) забезпечує виконання відомої вимоги до базисних функцій в методі Бубнова-Гальоркіна щодо задоволення ними нульових граничних умов. Окремо прокоментуємо, що в роботах [3–5] при виборі базисних функцій умовою задоволення ними граничних умов нехтується, натомість після процесу ортогоналізації нев'язки до базисних функцій по внутрішніх вузлах області вимагається, щоб базисні функції $C_i(\varphi)D_j(r)$ дорівнювали нулю тільки в граничних вузлах. На областях у вигляді круга або частини круга з узгодженими полярними сітками таке відхилення від теоретичних положень метода Бубнова-Гальоркіна не позначилося на якості та адекватності розв'язків, що отримані для граничних задач в роботах [3–5]. Наші ж власні попередні дослідження показали, що на областях більш складної геометричної форми, ніж коло та його частини, при використанні неузгоджених сіток обговорюваною вимогою нехтувати не можна.

Введемо в області $\overline{\Omega}$ рівномірну сітку із вузлами $(r_k;\varphi_l)$.

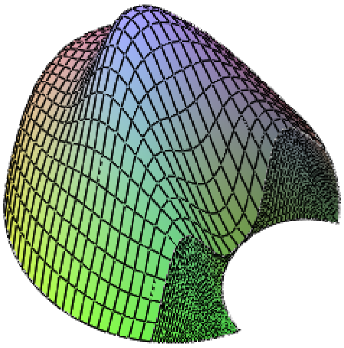
Згідно метода Бубнова-Гальоркіна підставимо вираз (8) до рівняння (6) та обчислимо нев'язку:

$$\begin{aligned}N(r;\varphi)=r\cdot\sum_{i=1}^{Q_\varphi}\sum_{j=1}^{Q_r}u_{ij}C_i(\varphi)\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(g(r;\varphi)\cdot D_j(r)\right)+\sum_{i=1}^{Q_\varphi}\sum_{j=1}^{Q_r}u_{ij}C_i(\varphi)\frac{\partial}{\partial r}\left(g(r;\varphi)\cdot D_j(r)\right)+\\+\frac{1}{r}\cdot\sum_{i=1}^{Q_\varphi}\sum_{j=1}^{Q_r}u_{ij}D_j(r)\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\left(g(r;\varphi)\cdot C_i(\varphi)\right)+2r\,.\end{aligned} \tag{9}$$

Коефіцієнти u_{ij} у виразі нев'язки (9) будемо знаходити із умови ортогональності нев'язки до базисних функцій $g(r;\varphi)\cdot C_l(\varphi)D_k(r)$ в усіх вузлах $(r_k;\varphi_l)$ сітки області $\overline{\Omega}$. За скалярний добуток природно обрати подвійний інтеграл по області $\overline{\Omega}$:

$$\iint_{\Omega} g(r;\varphi)\cdot C_l(\varphi)D_k(r)N(r;\varphi)rdrd\varphi=0\,. \tag{10}$$

Обчислювальні експерименти показали, що за прийнятний час обчислення для одного вузла $(r_k;\varphi_l)$ подвійного інтеграла (9) вбудованими методами СКМ Maple (навіть з використанням опції *numeric*) неможливо. Авторські реалізації методу Монте-Карло для обчислення інтегралів виду (10) хоча і дозволили отримати розв'язок задачі (6–7), але показали його сильну залежність від точності проведення операцій інтегрування (рис. 3). Як відомо з загальної теорії методу Бубнова-Гальоркіна, система рівнянь (10) для знаходження невідомих коефіцієнтів u_{ij} є погано обумовленою. При реалізації обчислювального процесу із процесором Intel(R) Core (TM) i-3-6006U CPU @ 2.00 GHz ОЗП 8ГБ обчислення коефіцієнтів одного рівняння із системи (10) (матриця системи мала вимірність 12×12) тривало від 100 до 300 с при виконанні операцій обчислення подвійних інтегралів методом Монте-Карло.



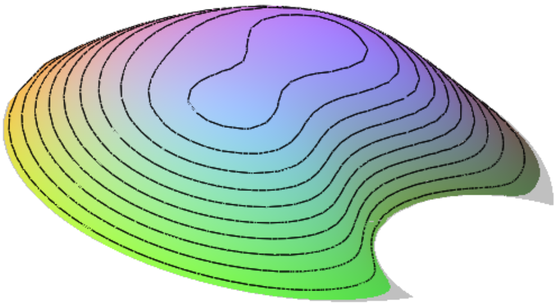


Рис. 3. Приклади фізично неправдоподібних розв'язків задачі (6–7), поява яких викликана недостатньою точністю виконання операції інтегрування.

Таким чином, фактором, що суттєво уповільнює виконання розрахунків, є фрагментарний опис сплайнів та похідних від них. Тому доцільно дослідити ефективність опису інтерполяційного сплайна однією функцією:

$$S_{m,r}(x)=\sum_{k=0}^{m}a_k(x-x_0)^k+\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=m-r+1}^{m}c_{ij}(x-x_i)_+^j\,, \tag{11}$$

де $(n+1)$ – кількість вузлів сітки, m – степінь сплайна, r – дефект сплайна,
$(x-x_i)_+^j=\frac{1}{2^j}\cdot\left(x-x_i+|x-x_i|\right)^j=\begin{cases}(x-x_i)^j, & x>x_i\\ 0, & x\le x_i\end{cases}.$

Опишемо у вигляді (11) базисні функції B-сплайна п'ятого степеня, які використаємо для формування розв'язку (8). Покладемо у формулі (10) m=5, r=1, тоді n=6, а сітка складається із семи вузлів. Розглянемо випадок рівномірного розташування вузлів із кроком h. Отже, така базисна функція має фрагментарний опис:

$$B_{5,1}(x)=\begin{cases}0 & x<-3h,\\ \frac{1}{120h^5}(x+3h)^5, & -3h\le x<-2h,\\ -\frac{1}{120h^5}\left(5x^5+45x^4h+150x^3h^2+210x^2h^3+75xh^4+51h^5\right), & -2h\le x<-h,\\ \frac{1}{60h^5}\left(5x^5+15x^4h-30x^3h^2+33h^5\right), & -h\le x<0,\\ \frac{1}{60h^5}\left(-5x^5+15x^4h-30x^3h^2+33h^5\right), & 0\le x<h,\\ \frac{1}{120h^5}\left(5x^5-45x^4h+150x^3h^2-210x^2h^3+75xh^4+51h^5\right), & h\le x<2h,\\ -\frac{1}{120h^5}(x-3h)^5, & 2h\le x<3h,\\ 0, & x\ge 3h.\end{cases} \tag{12}$$

Базисна функція $B_{5,1}(x)$ набуває в своїх вузлах значення, що наведені в табл. 1.

Таблиця 1

Значення базисної функції $B_{5,1}(x)$

x	$-3h$	$-2h$	$-h$	0	h	$2h$	$3h$
$B_{5,1}(x)$	0	$\frac{1}{120}$	$\frac{13}{60}$	$\frac{11}{20}$	$\frac{13}{60}$	$\frac{1}{120}$	0

Тоді для функції (11) вираз (12) набуває вигляду:

$$S_{5,1}(x)=\sum_{k=0}^{5}a_k(x+3h)^k+\sum_{i=1}^{5}c_i(x+(3-i)h)_+^5 . \tag{13}$$

У роботі [7] показано, що вираз (13) може бути спрощений до вигляду:

$$S_{5,1}(x)=\sum_{k=0}^{5}a_k(x+3h)^k+\sum_{i=1}^{5}c_i(x+(3-i)h)^4\cdot\left|x+(3-i)h\right|. \tag{14}$$

Знайдемо коефіцієнти з виразу (14) для сплайна (12). Очевидно, що для цього необхідно скласти систему із 11 рівнянь. Сім рівнянь отримаємо з умови рівності значень $B_{5,1}(x)$ та $S_{5,1}(x)$ у вузлах сітки $(x_j=-3h+jh,\ j=0..6)$. Ще чотири рівняння отримаємо за рахунок традиційних вимог для сплайнів щодо рівності значень перших та других похідних на кінцях проміжків інтерполяції. Враховуючи викладене, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} S_{5,1}(x_j)=B_{5,1}(x_j), \quad j=0..6, \\ S_{5,1}^{/}(x_0)=B_{5,1}^{/}(x_0), \\ S_{5,1}^{//}(x_0)=B_{5,1}^{//}(x_0), \\ S_{5,1}^{/}(x_6)=B_{5,1}^{/}(x_6), \\ S_{5,1}^{//}(x_6)=B_{5,1}^{//}(x_6). \end{cases} \tag{15}$$

Для довільного значення h $(h>0)$ система (15) виявилася визначеною. Коефіцієнти із розвинення (14) мають значення:

$$\begin{aligned} &a_0=\frac{162}{5};\ a_1=-\frac{27}{h};\ a_2=\frac{9}{h^2};\ a_3=-\frac{3}{2h^3};\ a_4=\frac{1}{8h^4};\ a_5=0; \\ &c_1=-\frac{1}{40h^5};\ c_2=\frac{1}{16h^5};\ c_3=-\frac{1}{12h^5};\ c_4=\frac{1}{16h^5};\ c_5=-\frac{1}{40h^5}\ . \end{aligned} \tag{16}$$

Таким чином, фрагментарний опис В-сплайнів (12) може бути замінений на опис (14) із коефіцієнтами (16).

Висновки

Обчислювальні експерименти показали, що подання B-сплайна у вигляді (14) приводить до скорочення вдвічі часу розрахунків інтегралів $\iint\limits_{\Omega} g(r;\varphi)\cdot C_l(\varphi)D_k(r)r^2drd\varphi = 0$, які входять до складу формули (10), порівняно з фрагментарним поданням виду (12). Відзначимо, що в цьому випадку при застосуванні методу Монте-Карло для обчислення вказаних інтегралів відбувається обчислення значень самого сплайна. Інші доданки формули нев'язки (9) містять похідні від B-сплайна. При обчисленні подвійних інтегралів від таких доданків застосування обох форм опису B-сплайна приводили приблизно до однакової швидкості виконання розрахунків. Аналітичне інтегрування СКМ Maple за прийнятний час не було виконано. Тому очевидною є доцільність застосування кубатурних формул для наближеного виконання операції інтегрування доданків із формули нев'язки (9) по неконцентричному кільцевому сектору, окремим випадком якого є луночка (3). Але дана задача є темою окремого дослідження.

Таким чином, в результаті виконаних досліджень практично показано, що в системах символьної математики певні переваги має застосування опису сплайнів єдиним виразом.

Список використаної літератури

1. Тимошенко С.П. Теория упругости / С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер. — М.: Наука, 1979. — 560 с.
2. Марченко Н.А. О численном решении эллиптических задач порядка 2*m* методом наименьших квадратов с использованием сплайн-аппроксимации на прямоугольных сетках / Н.А. Марченко, В.И. Павлов // Математическое моделирование. — 1990. — Т. 2. — № 4. — С. 121-132.
3. Федосова А.Н. Решение задач теории упругости с применением *S*-сплайнов / А.Н. Федосова, Д.А. Силаев // Вестник МГСУ. — 2013. — № 10. — С. 75-84.
4. Силаев Д.А. Применение дважды непрерывно дифференцируемого S-сплайна / Д.А. Силаев, Д.О. Коротаев, С.В. Капустин // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика, физика, химия. — 2009. — Вып. 12. — № 10. — С. 41-47.
5. Силаев Д.А. Решение краевых задач с помощью S-сплайна / Д.А. Силаев, Д.О. Коротаев // Компьютерные исследования и моделирование. — 2009. — Т. 1. — № 2. — С. 161-171.
6. Де Бор К. Практическое руководство по сплайнам / К. де Бор. — М.: Радио и связь, 1985. — 304 с.
7. Игнатьев Ю.Г. Математическое моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple / Ю.Г. Игнатьев. — Казань: Казанский университет, 2013. — 298 с.
8. Доля П.Г. Об одном способе представления полиномиальных сплайнов в системах символьной математики / П.Г. Доля // Вісник Харківського національного університету. Серія: Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. — 2007. — № 775. — С. 130-139.

References

1. Timoshenko S.P., Goodyear J.N. Teoriya uprugosti. Nauka. Moscow. (1979)
2. Marchenko N.A. , Pavlov V.I. O chislennom reshenii ellipticheskih zadach poryadka 2*m* metodom naimenshih kvadratov s ispolzovaniem splayn-approksimatsii na pryamougolnyih setkah. Matematicheskoe modelirovanie. **2**, 4, 121-132 (1990)

3. Fedosova A.N., Silaev D.A. Reshenie zadach teorii uprugosti s primeneniem S-splaynov. Vestnik MGSU. **10**, 75-84 (2013)
4. Silaev D.A., Korotaev D.O., Kapustin S.V. Primenenie dvazhdyi nepreryivno differentsiruemogo S-splayna. Vestnik YuUrGU. Seriya: Matematika, fizika, himiya. **12**, 10, 41-47 (2009)
5. Silaev D.A., Korotaev D.O. Reshenie kraevyih zadach s pomoschyu S-splayna. Kompyuternyie issledovaniya i modelirovanie. **1**, 2, 161-171 (2009)
6. De Boor K. Prakticheskoe rukovodstvo po splaynam. Radio i svyaz. Moscow. (1985)
7. Ignatev Yu.G. Matematicheskoe modelirovanie fundamentalnyih ob'ektov i yavleniy v sisteme kompyuternoy matematiki Maple. Kazanskiy universitet. Kazan (2013)
8. Dolya P.G. Ob odnom sposobe predstavleniya polinomialnyih splaynov v sistemah simvolnoy matematiki. Visnyk Harkivskoho natsionalnoho universytetu. Seriya: Matematichne modelyuvannya. Informatsiyni tehnologiyi. Avtomatizovani systemy upravlinnya. **775**, 130-139 (2007)